第２講　重心と２体問題（力学）

1（解答用紙１）

質量 m の小球 A，B が長さ l のひもの両端につながれている。図１のように水平な天井に小球 A，B を l だけ離して固定した。小球 B を固定した点を O とし，重力加速度の大きさを g とする。小球 A，B の大きさ，ひもの質量，および空気抵抗は無視できるものとする。以下の設問に答えよ。

Ⅰ　小球 B を固定したまま小球 A を静かに放した。

(1)　ひもと天井がなす角度を θ とする。小球 A の速さを θ を用いて表せ。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ とする。

(2)　小球 A が最下点$\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$に達したときのひもの張力の大きさを求めよ。

(3)　小球 A が最下点$\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$に達したときの小球 A の加速度の大きさと向きを求めよ。

Ⅱ　小球 A がはじめて最下点$\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$に達したときに小球 B を静かに放した。この時刻を $t=0$ とする。

(1)　２個の小球の重心を G とする。小球 B を放したあとの重心 G の加速度の大きさと向きを求めよ。

(2)　時刻 $t=0$ における，重心 G に対する小球 A，B の相対速度の大きさと向きをそれぞれ求めよ。

(3)　時刻 $t=0$ における，ひもの張力の大きさを求めよ。

(4)　時刻 $t=0$ における，小球 A，B の加速度の大きさと向きをそれぞれ求めよ。

(5)　小球 B を放してから，はじめて小球 A と小球 B の高さが等しくなる時刻を求めよ。

(6)　小球 B を放したあとの時刻 t における小球 A の水平位置を求めよ。ただし，点 O を原点とし，右向きを正とする。

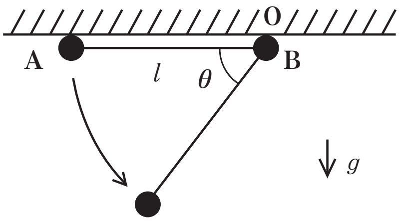


図１

＜ Note ＞

2（解答用紙１）

水平な机の上に置かれた台の内側に，半径 R の半円形のレールがとりつけられている(図1)。机上の一点Oを原点として水平に x 軸をとり，レールの中心Cの x 座標が原点に一致するように台を置いた。まず，台を机に固定したまま，図１のように小球をレールの最下点Pから $+x$ 方向に L だけ離れたレール上の点Qに一旦静止させる。その後小球はレール上を摩擦を受けることなく運動するものとして，以下の設問に答えよ。ただし，小球の質量を m_1，レールを含んだ台の質量を m_2，重力加速度の大きさを g とする。また，L は R に比べて十分小さいものとする。必要であれば，θ〔rad〕が十分小さいときの近似公式，$\cos\theta \fallingdotseq 1$，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$，を用いても良い。

Ⅰ　台を机に固定したままで，小球を静かに放したところ単振動を始めた。小球の x 座標を x_1，x 軸方向の加速度を a_1 とする。

(1)　小球の x 軸方向の運動方程式を求めよ。

(2)　この単振動の周期を求めよ。

Ⅱ　図１の状態に戻し，今度は，台が机に対して摩擦を受けることなく動けるようにした。その上で小球を点Qから静かに放したところ，小球はやはり単振動を始めた。図２のように小球と点Pの x 座標をそれぞれ x_1，x_2，小球と台の x 軸方向の加速度をそれぞれ a_1，a_2 とする。

(1)　小球と台に働く力の関係から，a_1 と a_2 の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2)　小球と台を合わせた系に対しては x 軸方向には外からの力は働かないので，系の重心の x 座標は変化しない。このことから，x_1 と x_2 の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3)　小球の単振動の中心位置の x 座標を求めよ。

(4)　小球の単振動の振幅を求めよ。

(5)　小球の単振動の周期を求めよ。

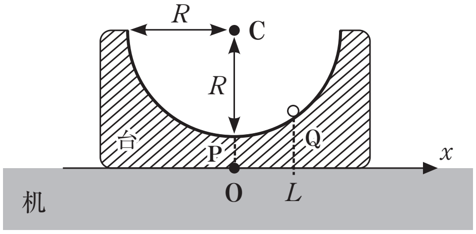


図１

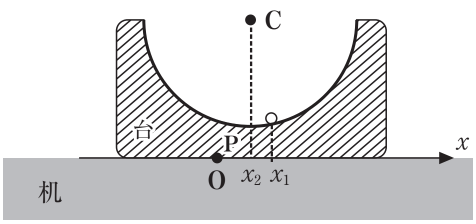


図２

＜ Note ＞

第２講　確認テスト

（解答用紙１）

図１のように大きさの無視できる小球1，２が床から高さ h の位置に固定されている。二つの小球は鉛直方向に並んでおり，その間隔は十分に小さく無視できるものとする。鉛直上側の小球１の質量を m，下側の小球２の質量を M とする。小球は鉛直方向にのみ運動し，小球1，２の衝突および小球２が床で跳ね返る際の反発係数は１とする。小球1，２の速度は鉛直上向きを正とし，重力加速度の大きさを g で表す。以下の設問に答えよ。

Ⅰ　小球の固定を静かに外す。小球1, 2は同時に落下を始め, 小球２が床で跳ね返った直後, 小球１と小球２が衝突する。その後，小球１は床から最大の高さ H まで上昇した。

(1)　小球２が床で跳ね返る直前における小球1，２の落下する速さを v とする。小球２が床で跳ね返った直後，速度 $-v$ の小球１と，速度 v の小球２が衝突する。小球1，２の衝突直後における小球１の速度を v_1'，小球２の速度を v_2' とするとき，$v_1'-v_2'$ を，v を用いて表せ。

(2)　v_1' と v_2' を，m，M，v を用いて表せ。また，M が m に比べて十分に大きいとき，H は h の何倍か，数値で答えよ。

Ⅱ　以下では $M=3m$ とする。図２のように小球1，２を質量の無視できる長さ l $(l<h)$ の伸びない糸でつなぎ，設問Ⅰと同様に高さ h から落下させる。糸は，たるんだ状態では小球の運動に影響を与えない。床で跳ね返った小球２は，小球１と衝突した後，床に静止した。

(1)　小球１が高さ l に達すると，糸に張力が生じる。その直前の小球１の速度を v_1，小球１と小球２の重心の速度を V とする。V を，v_1 を用いて表せ。

(2)　糸に張力が生じると小球２が床から浮き上がり，その直後，再び糸がたるむ。糸がたるんだ瞬間における小球１の速度 u_1 と小球２の速度 u_2 を，それぞれ v_1 を用いて表せ。ただし，糸に張力が生じる前後で小球1，２の力学的エネルギーの和は保存されるものとする。

＜ Note ＞

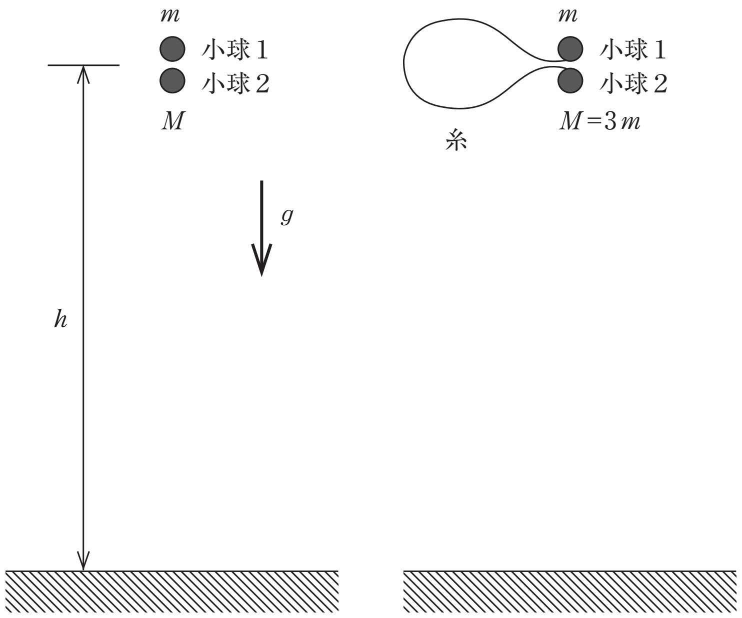
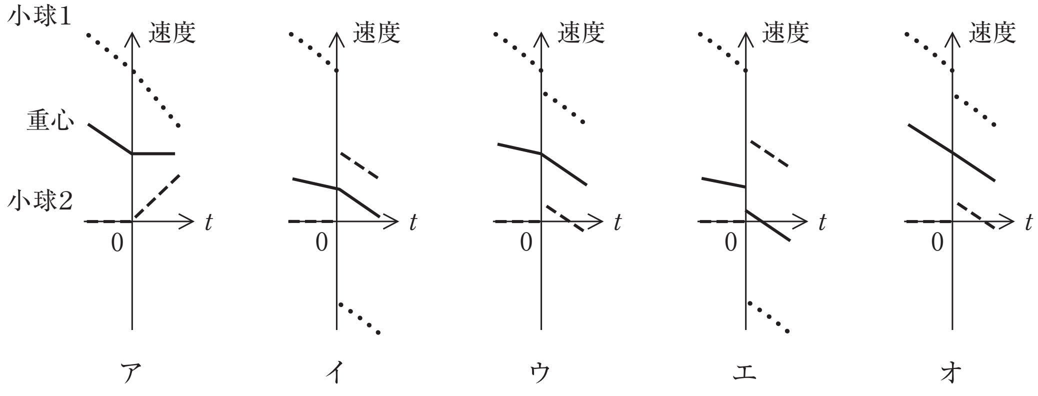


図１　図２

(3)　小球２が床から浮き上がる瞬間の時刻を $t=0$ とする。$|t|$ が十分に小さい範囲で，小球１と小球２の重心の速度，小球１の速度及び小球２の速度を t の関数として図示するとき，最も適切なものを以下のア～オから一つ選べ。ただし，図中の実線は重心の速度，点線は小球１の速度，破線は小球２の速度を表す。



＜ Note ＞

Ⅲ　引き続き $M=3m$ とする。小球１，２を，質量の無視できる自然長 l （$l<h$）のゴムでつないで, 設問Ⅱと同様に高さ h から落下させる。図３のように, ゴムを自然長より x （$x \geqq 0$）だけ伸ばすと，大きさ kx の復元力が働くものとし，自然長から引き伸ばすために必要な仕事は $\frac{1}{2}kx^2$ で与えられる。また，ゴムは，たるんだ状態では復元力を及ばさず，小球の運動に影響を与えない。

(1)　k がある値 k_c より大きければ，小球１，２の衝突後に床に静止していた小球２は，やがてゴムの張力により床から浮き上がる。$k>k_c$ のとき，小球２が浮き上がる瞬間におけるゴムの長さを $l+\Delta l$ とする。Δl を m，g，k を用いて表せ。

(2)　小球２が床から浮き上がる瞬間における小球１の速度 w を，v_1，m，g，k を用いて表せ。ただし v_1 は設問Ⅱ(1)と同様，ゴムに復元力が生じる直前の小球１の速度とする。また，この結果より k_c を，v_1，m，g を用いて表せ。

(3)　小球２が床から浮き上がってから再びゴムがたるむまでの小球１，２の運動は，重心の等加速度運動と，重心のまわりの単振動の合成となる。k が十分に大きければ，小球２が浮き上がる瞬間におけるゴムの伸び Δl は無視してよい。このとき，小球２が床から浮き上がってからゴムがたるむまでの時間 T を，m，k を用いて表せ。ただし，k は十分に大きいため，ゴムがたるむ前に小球２が床に接触することはない。

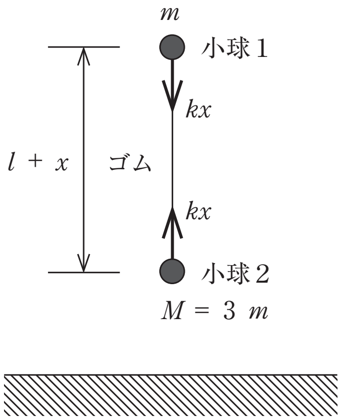


図３

＜ Note ＞

第２講　解答

1

Ⅰ　(1)　$\sqrt{2gl\sin\theta}$

(2)　$3mg$

(3)　大きさ $2g$，鉛直上向き

Ⅱ　(1)　大きさ g，鉛直下向き

(2)　A：大きさ $\sqrt{\dfrac{gl}{2}}$，水平方向右向き　　B：大きさ $\sqrt{\dfrac{gl}{2}}$，水平方向左向き

(3)　mg

(4)　A：0　　B：$2g$，鉛直方向下向き

(5)　$\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{l}{2g}}$

(6)　$\sqrt{\dfrac{gl}{2}}\,t+\dfrac{l}{2}\sin\left(\sqrt{\dfrac{2g}{l}}\,t\right)$

2

Ⅰ　(1)　$m_1a_1=-\dfrac{m_1g}{R}x_1$

(2)　$2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

Ⅱ　(1)　$m_1a_1+m_2a_2=0$

(2)　$m_1x_1+m_2x_2=m_1L$

(3)　$\dfrac{m_1L}{m_1+m_2}$

(4)　$\dfrac{m_2L}{m_1+m_2}$

(5)　$2\pi\sqrt{\dfrac{m_2R}{(m_1+m_2)g}}$

第２講　確認テスト

【解答】

Ⅰ　(1)　$v_1{}'-v_2{}'=2v$　　(2)　$v_1{}'=\dfrac{-m+3M}{m+M}v$　　$v_2{}'=\dfrac{-3m+M}{m+M}v$　　9倍

Ⅱ　(1)　$\dfrac{1}{4}v_1$　　(2)　$u_1=-\dfrac{1}{2}v_1$　　$u_2=\dfrac{1}{2}v_1$　　(3)　イ

Ⅲ　(1)　$\dfrac{3mg}{k}$　　(2)　$w=\sqrt{v_1{}^2-\dfrac{15mg^2}{k}}$　　$k_{\mathrm{C}}=\dfrac{15mg^2}{v_1}$　　(3)　$\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{3m}{k}}$

【解説】

Ⅰ

(1)　反発係数が１

$$v_1{}'-v_2{}'=(-1)\{(-v)-v\}\qquad\therefore\quad \underline{v_1{}'-v_2{}'=2v}\quad\cdots①$$

(2)　運動量保存則

$$mv_1{}'+Mv_2{}'=m(-v)+Mv\quad\cdots②$$

①②より，

$$\underline{v_1{}'=\frac{-m+3M}{m+M}v}\qquad \underline{v_2{}'=\frac{-3m+M}{m+M}v}$$

Mがmに比べて十分大きいとき，$\dfrac{m}{M}\fallingdotseq 0$より，$v_1{}'\fallingdotseq 3v$

$$\therefore\quad \frac{H}{h}=\frac{\frac{1}{2}m(3v)^2}{\frac{1}{2}mv^2}=\underline{9}$$

Ⅱ

(1)　$V=\dfrac{mv_1+M\cdot 0}{m+M}=\underline{\dfrac{1}{4}v_1}$

(2)
$$\begin{cases}\text{運動量保存則：}mu_1+3mu_2=mv_1\\ \text{力学的エネルギー保存則：}\dfrac{1}{2}mu_1{}^2+\dfrac{1}{2}\cdot 3mu_2{}^2=\dfrac{1}{2}mv_1{}^2\end{cases}$$

より，

$$\underline{u_1=-\frac{1}{2}v_1}\qquad \underline{u_2=\frac{1}{2}v_1}$$

(3)　Ⅱ(2)のu_1とu_2の値

$t=0$で糸が張る前後で，運動量が保存するため

重心の速度は不変。

以上より，<u>イ</u>

Ⅲ

(1)　$k \cdot \Delta l = 3mg \qquad \therefore \quad \Delta l = \underline{\dfrac{3mg}{k}}$

(2)　力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + mg \cdot \Delta l + \frac{1}{2}mw^2$$

と，(1)の結果より，

$$w = \underline{\sqrt{{v_1}^2 - \frac{15mg^2}{k}}}$$

$w > 0$ より，

$$k > \frac{15mg^2}{{v_1}^2} \qquad \therefore \quad k_C = \underline{\frac{15mg^2}{v_1}}$$

(3)　小球１と２の相対位置は，換算質量 $\mu = \dfrac{mM}{m+M} = \dfrac{3}{4}m$ の単振動をする。

求める時間は，この単振動の半周期ゆえ，

$$\frac{1}{2} \times 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} = \underline{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3m}{k}}}$$